Кухтенко Елена Анатольевна, учитель математики высшей категории МБОУ гимназии № 1 города Армавира Краснодарского края.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОЕКТНЫХ МЕТОДОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ И СИСТЕМ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ЕГЭ

Использование проектных методов при изучении важных тем курса алгебры и начал анализа в 10-11 классах, позволяет находить интересные способы и методы решения сложных задач.

Обучение решению логарифмических неравенств – важная составляющая часть изучения курса алгебры и начал анализа в старшей школе. Предлагаемые неравенства относятся к повышенному уровню сложности, предназначаются для определения математической компетенции выпускников образовательных учреждений, реализующих программы среднего (полного) общего образования на профильном уровне и для дифференциации по уровню подготовки старшеклассников. Показаны различные приёмы и методы решения логарифмических неравенств, в том числе и «метод декомпозиции», который существенно упрощает решение неравенств в тех случаях, когда переменная находится в основании логарифма. Думаю, что последний метод будет интересен выпускникам и учителям-практикам, стремящимся освоить тему «Логарифмы» на достаточно высоком уровне, окажет активную помощь при подготовке к итоговым испытаниям, а также будет способствовать развитию и обогащению математической культуры учащихся.

Каждая решенная мною задача
становилась образцом, который служил
впоследствии для решения других задач.

Р. Декарт

1. Решите неравенство: $\mathbf{3 \cdot 2^{\log_6 x} + 4 \cdot 3^{\log_6 x} \geq x + 12}$.

Решение.

Учтем, что $x > 0$. Получим $3 \cdot \left(\frac{6}{3}\right)^{\log_6 x} + 4 \cdot 3^{\log_6 x} \geq x + 12;$

$3 \cdot \frac{x}{3^{\log_6 x}} + 4 \cdot 3^{\log_6 x} \geq x + 12;\ \left(3 \cdot \frac{x}{3^{\log_6 x}} - x\right) + \left(4 \cdot 3^{\log_6 x} - 12\right) \geq 0;$

$x \cdot \frac{3 - 3^{\log_6 x}}{3^{\log_6 x}} + 4\left(3^{\log_6 x} - 3\right) \geq 0;\ \left(3 - 3^{\log_6 x}\right) \cdot \left(\frac{x}{3^{\log_6 x}} - 4\right) \geq 0.$

Решим неравенство методом интервалов.

Рассмотрим функцию $y = \left(3 - 3^{\log_6 x}\right) \cdot \left(\frac{x}{3^{\log_6 x}} - 4\right)$. $D_{(y)} = (0; +\infty)$.

Нули функции: $\left[\begin{array}{l} 3^{\log_6 x} = 3, \\ \frac{x}{3^{\log_6 x}} = 4; \end{array}\right. \left[\begin{array}{c} x = 6, \\ x = 4 \cdot 3^{\log_6 x}; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 6; \\ x = 36. \end{array}\right.$

Решим уравнение: $x = 4 \cdot 3^{\log_6 x}$. Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 6:

$\log_6 x = \log_6 4 + \log_6 x \cdot \log_6 3;$

$$\log_6 x \cdot (1 - \log_6 3) = \log_6 4; \log_6 x = \frac{\log_6 4}{1 - \log_6 3}; \quad \log_6 x = 2; \quad x = 36.$$

$x \in [6; 36]$

Ответ: $[6; 36]$.

2. Решите неравенство:

$$\mathbf{\log_3^2(x-2) + 3 \cdot (x-2)(2\log_3 \sqrt{x-2} + 3) \geq 7\log_3(x-2) + 30}$$

Решение. Учтем, что $x > 2$. Пусть $\log_3(x-2) = y$, получим

$y^2 + 3(x-2)(y+3) \geq 7y + 30;$

$y^2 - 7y - 3 + 3(x-2)(y+3) \geq 0;$
$(y+3)(y - 16 + 3x) \geq 0.$
Далее, $(\log_3(x-2)+3)(\log_3(x-2) + 3x - 16) \geq 0$. Решим неравенство методом интервалов.
Рассмотрим функцию $y = (\log_3(x-2)+3)(\log_3(x-2)+3x-16)$
$D_{(y)} = (2;\infty)$. Нули функции: $2\dfrac{1}{27}$; 5.
1) $\log_3(x-2) = -3;\quad x = 2\dfrac{1}{27}$.
2) $\log_3(x-2) = -3x + 16$. Функция $f(x) = \log_3(x-2)$ монотонно возрастающая , функция
$g(x) = 16 - 3x$ монотонно убывающая. Уравнение может иметь не более одного корня.
Подбором находим x=5.
Ответ: $\left(2; 2\frac{1}{27}\right]$; $[5;+\infty)$.

3. Решите неравенство:

$$\mathbf{\log_3((7^{-x^2}-4)(7^{-x^2+9}-1)) + \log_3\left(\frac{7^{-x^2}-4}{7^{-x^2+9}-1}\right) > \log_3(7^{6-x^2}-3)^2.}$$

Решение. Пусть $7^{-x^2} = t,\ 0 < t \leq 1$.

Получим $\log_3((t-4)(7^9 t - 1)) + \log_3 \dfrac{t-4}{7^9 t - 1} > \log_3(7^6 t - 3)^2$

Т.к. $0 < t \leq 1$, то $t - 4 < 0$. Отсюда, $7^9 t - 1 < 0;\quad t < \frac{1}{7^9}$, т.е. $0 < t < \frac{1}{7^9}$. Получим

$$\begin{cases}\log_3(t-4)^2 > \log_3(7^6 t - 3)^2 \\ 0 < t < \frac{1}{7^9};\end{cases} \begin{cases}|t-4| > |7^6 t - 3| \\ 0 < t < \frac{1}{7^9};\end{cases} \begin{cases}4 - t > 3 - 7^6 t \\ 0 < t < \frac{1}{7^9};\end{cases} \begin{cases}t > \frac{1}{1-7^6} \\ 0 < t < \frac{1}{7^9};\end{cases}$$

$0 < t < \frac{1}{7^9}$.

Значит, $7^{-x^2} < 7^{-9};\quad x^2 > 9;\quad |x| > 3;\quad \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < -3\end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty;-3);(3;\infty)$.

4. Решите неравенство: $\mathbf{\log_{\frac{1}{5}}\left(7^{1+\log_{35}x} - \frac{1}{5^{1+\log_{35}x}}\right) \geq \log_{35}x - 1}$

Решение. $\log_5\left(\frac{35^{1+\log_{35}x}-1}{5^{1+\log_{35}x}}\right) \leq 1 - \log_{35}x;$

$\log_{35}\frac{35x-1}{5^{1+\log_{35}x}} \leq 1 - \log_{35}x$. Учтем, что $\frac{35x-1}{5^{1+\log_{35}x}} > 0$. Так как $5^{1+\log_{35}x} > 0$, то

$35x - 1 > 0;\quad x > \dfrac{1}{35}$

Получим $\log_5(35x-1) - (\log_{35}x + 1) \leq 1 - \log_{35}x;\quad \log_5(35x-1) \leq 2;\quad \begin{cases}x > \frac{1}{35}, \\ x \leq \frac{26}{35}.\end{cases}$

Ответ: $(\frac{1}{35};\frac{26}{35}]$.

5. Решите неравенство: $\mathbf{3^{log_3^2 x} + x^{\log_3 x} < 6}$.

Решение. Учтем, что $x > 0$. Имеем, $\left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} > 6$; $2 \cdot x^{\log_3 x} < 6$; $x^{\log_3 x} < 3$

Прологарифмируем обе части неравенства по основанию 3:

$$\log_3 x^{\log_3 x} < 1; \quad |\log_3 x| < 1, \qquad \log_3 \frac{1}{3} < \log_3 x < \log_3 3; \quad \frac{1}{3} < x < 3;$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$

<u>Применение метода декомпозиции</u> при решении логарифмических неравенств, при решении систем неравенств.

1) Выражение $\log_a u - \log_a v$ имеет тот же знак, что и $(u - v)$, при $u > 0$, $v > 0, a > 0, a \neq 1$.

2) Выражение $\log_{h(x)} f(x) - \log_{h(x)} g(x)$ имеет тот же знак, что и $\big(f(x) - g(x)\big)(h(x) - 1)$, при $f(x) > 0, g(x) > 0, h(x) > 0, h(x) \neq 1$

6. Решите неравенство: $\frac{\log_2(3 \cdot 2^{x-1} - 1)}{x} \geq 1$.

Решение. $\frac{\log_2(3 \cdot 2^{x} - 1) - x}{x} \geq 0$; $\frac{\log_2(3 \cdot 2^{x} - 1) - \log_2 2^x}{x} \geq 0$;

$$\begin{cases} \dfrac{3 \cdot 2^{x-1} - 1 - 2^x}{x} \geq 0, \\ 3 \cdot 2^{x-1} - 1 > 0, \\ 2^x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{2^x \cdot 0{,}5 - 1}{x} \geq 0, \\ 2^x > \dfrac{2}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{2^x - 2}{x} \geq 0, \\ x > \log_2 \dfrac{2}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x \geq 1 \end{array}\right. \\ x > \log_2 \dfrac{2}{3} \end{cases} \left[\begin{array}{l} \log_2 \dfrac{2}{3} < x < 0, \\ x \geq 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $(\log_2 \frac{2}{3}; 0)$; $[1; +\infty)$.

7. Решите неравенство: $\log_{\sqrt[3]{2x^2 - 7x + 6}} \frac{x}{3} > 0$

Решение. По формуле перехода от одного основания логарифма к другому, получим:

$$\frac{\lg x - lg3}{\frac{1}{3}\lg(2x^2 - 7x + 6)} > 0; \qquad \frac{lgx - lg3}{\frac{1}{3}(\lg(2x^2 - 7x + 6) - lg1)} > 0;$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{(2x^2 - 7x + 6) - 1} > 0, \\ x > 0, \\ 2x^2 - 7x + 6 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x-3}{(x-2{,}5)(x-1)} > 0, \\ (x - 1{,}5)(x - 2) > 0, \\ x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 1 < x < 2{,}5 \\ x > 3 \end{array}\right. \\ x > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x < 1{,}5 \\ x > 2 \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} 1 < x < 1{,}5, \\ 2 < x < 2{,}5, \\ x > 3. \end{array}\right.$$

Ответ: (1;1,5);(2;2,5);(3;∞).

8. Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{x}}(\frac{5}{2}x - 1) \geq -2$.

Решение. $-\log_x(\frac{5}{2}x - 1) + 2 \geq 0$; $2 - \frac{\lg(\frac{5}{2}x - 1)}{lgx} \geq 0$; $\frac{lgx^2 - \lg(\frac{5}{2}x - 1)}{lgx - lg1} \geq 0$.

Получим: $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 2{,}5x + 1}{x - 1} \geq 0, \\ 2{,}5x - 1 > 0, \\ x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0{,}5 \leq x < 1, \\ x \geq 2; \end{array}\right. \\ x > 0{,}4; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} 0{,}5 \leq x < 1, \\ x \geq 2. \end{array}\right.$

Ответ: $[0{,}5; 1)$; $[2; \infty)$.

9. Решите систему неравенств: $\begin{cases} \log_{\log_x 2x}(6x-2) \geq 0; \\ 20^x - 64 \cdot 5^x - 4^x + 64 \leq 0. \end{cases}$

Решение. 1) $20^x - 64 \cdot 5^x - 4^x + 64 \leq 0.$

$5^x \cdot (4^x - 64) - (4^x - 64) \leq 0;$ $(5^x - 1)(4^x - 64) \leq 0;$ $x \in [0; 3].$

2) $\log_{\log_x 2x}(6x-2) \geq 0;$ $\log_{\log_x 2x}(6x-2) - \log_{\log_x 2x} 1 \geq 0;$

$\begin{cases} (6x-2-1)\cdot(\log_x 2x - 1) \geq 0, \\ 6x-2>0, \quad x>0, \quad x \neq 1 \\ \log_x 2x > 0, \quad \log_x 2x \neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} (6x-3)(\log_x 2x - \log_x x) \geq 0, \\ x > \dfrac{1}{3} \quad, x \neq 1, \\ \log_x 2x - \log_x 1 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (6x-3)(2x-x)(x-1) \geq 0, \\ x > \frac{1}{3}, x \neq 1, \\ (2x-1)(x-1) > 0 \quad ; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x > 1, \\ \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}. \end{array}\right.$

3) $x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right); (1; 3].$ Ответ: $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right); (1; 3].$

10. Решите неравенство: $\frac{\log_7(2x+15)}{\log_7(x+6)} \geq \frac{2\log_{3^{x-2}}|x|}{\log_{3^{x-2}}(x+6)}.$

Решение. Учтем, что $\begin{cases} x \neq 2, x \neq 0, \\ x > -6, \\ x \neq -5. \end{cases}$ Получим:

$\log_{x+6}(2x+15) \geq 2\log_{x+6}|x|;$ $\log_{x+6}(2x+5) - \log_{x+6} x^2 \geq 0;$

$$\frac{\lg(2x+15)}{\lg(x+6)} - \frac{lgx^2}{\lg(x+6)} \geq 0; \quad \frac{\lg(2x+15) - lgx^2}{\lg(x+6) - lg1} \geq 0;$$

$\begin{cases} \frac{2x+15-x^2}{x+6-1} \geq 0; \\ x > -6; x \neq -5; \\ x \neq 0; x \neq 2 \quad ; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -5 \\ -3 \leq x \leq 5 \end{array}\right. \\ x > -6; x \neq -5; \\ x \neq 0; x \neq 2 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} -6 < x < -5; \\ -3 \leq x < 0; \\ 0 < x < 2; \\ 2 < x \leq 5. \end{array}\right.$

Ответ: (-6;-5), $[-3; 0), (0; 2), (2; 5].$