

ЗАДАЧИ НА РАБОТУ И ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ ТРУДА

Система уравнений, которую можно составить на основании условий, в задачах на **работу и производительность труда** обычно содержит следующие величины: **время t** , в течение которого производится работа, **производительность N** - работу, произведенную в единицу времени, и собственно **работу A** , произведенную за время t .

Уравнение, связывающее эти три величины, имеет вид: **$A=NT$** .

К задачам на работу относят задачи на перекачивание жидкости насосами. В качестве произведенной работы в этом случае удобно рассматривать объем перекачанной воды.

Задача 16. В бассейн проведены две трубы – подающая и отводящая, причем через первую трубу бассейн наполняется на 2ч дольше, чем через вторую опорожняется. При заполненном на $\frac{1}{3}$ бассейне были открыты обе трубы, и бассейн оказался пустым спустя 8ч. За сколько часов одна первая труба может наполнить бассейн и за сколько часов одна вторая труба может опорожнить полный бассейн?

Решение: $V \text{ м}^3$ - объем бассейна, производительность подающей трубы – $x \text{ м}^3/\text{ч}$, отводящей – $y \text{ м}^3/\text{ч}$. Время, необходимое подающей трубе для заполнения бассейна – $\frac{V}{x}$ ч, время, необходимое отводящей трубе на опорожнение бассейна – $\frac{V}{y}$ ч. По условию задачи:

$$\frac{V}{x} - \frac{V}{y} = 2.$$

Т.к. производительность отводящей трубы больше производительности наполняющей ($x < y$), то при обеих включенных трубах будет происходить опорожнение бассейна и $\frac{1}{3}$ бассейна опорожнится за время $\frac{1/3V}{y-x}$, которое по условию задачи равно 8ч.

Запишем систему:
$$\begin{cases} \frac{V}{x} - \frac{V}{y} = 2, \\ \frac{V}{y-x} = 24. \end{cases}$$

Разделим числитель и знаменатель дроби, стоящей во втором уравнении системы, на V . Тогда $u = \frac{V}{x}$ и $v = \frac{V}{y}$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} u - v = 2, \\ \frac{uv}{u - v} = 24; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u - v = 2, \\ uv = 48. \end{cases} \quad \text{Решая систему, получим } u = 8; v = 6.$$

Ответ : за 8 часов, за 6 часов.

Задача 17. Для прокладки траншеи выделены два экскаватора разных типов. Время, необходимое первому экскаватору для самостоятельной прокладки траншеи, на 3ч меньше времени, необходимого второму экскаватору. Сумма этих времен в $4\frac{4}{35}$ раза больше времени, необходимого для прокладки траншеи при совместной работе двух экскаваторов. Определить, сколько времени необходимо каждому экскаватору для самостоятельной прокладки траншеи.

Решение: Пусть $V \text{ м}^3$ - объем вынутаго грунта, $N_1 \text{ м}^3/\text{ч}$ и $N_2 \text{ м}^3/\text{ч}$ - производительности 1-го и 2-го экскаваторов. Время, необходимое первому экскаватору для самостоятельной прокладки траншеи $\frac{V}{N_1}$, а второму - $\frac{V}{N_2}$.

По условию задачи $\frac{V}{N_1} + 3 = \frac{V}{N_2}$.

Также $\frac{V}{N_1} + \frac{V}{N_2}$ в $4\frac{4}{35}$ раза больше времени, необходимого для прокладки траншеи при совместной работе двух экскаваторов, т.е.

$$4\frac{4}{35} \cdot \frac{V}{N_1 + N_2} = \frac{V}{N_1} + \frac{V}{N_2}; \quad 4\frac{4}{35} \cdot \frac{1}{\frac{N_1}{V} + \frac{N_2}{V}} = \frac{V}{N_1} + \frac{V}{N_2}.$$

Введем неизвестные $x = \frac{V}{N_1}$; $y = \frac{V}{N_2}$. Получим систему:

$$\begin{cases} 4\frac{4}{35} \cdot \frac{xy}{x+y} = x+y, \\ x+3=y, \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2 + 12x - 315 = 0, \\ x+3=y. \end{cases}$$

$x_1 = 7,5$; $x_2 < 0$. Итак, для самостоятельной прокладки траншеи первому экскаватору требуется 7,5 часов, а второму 10,5 часов.

Ответ: 7,5ч и 10,5ч

Задача 18. Бригада лесорубов должна была по плану за несколько дней заготовить 216 м^3 дров. Первые три дня она работала по плану, а затем каждый день заготавливала на 8 м^3 дров больше, чем предусмотрено планом; поэтому уже за день до назначенного срока было заготовлено 232 м^3 дров. Сколько м^3 дров должна была заготавливать бригада в день по плану?

Решение: Пусть бригада должна была по плану работать x дней; заготавливала в день по плану $y \text{ м}^3$ дров. Тогда по условию $xy = 216$. За первые три дня она заготовила $3y \text{ м}^3$ дров. Далее работала еще

$(x - 4)$ дня, заготавливая в день $(y + 8) \text{ м}^3$ дров. Значит,

$$3y + (y + 8)(x - 4) = 232.$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} xy = 216; \\ 3y + (y + 8)(x - 4) = 232; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 216, \\ 8x - y = 48; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 6x - 27 = 0, \\ y = 8x - 48. \end{cases} \quad \text{Корнями первого урав-$$

нения системы являются 9 и -3 . Итак, бригада должна была заготавливать в день по плану $8 \cdot 9 - 48 = 24 \text{ м}^3$ дров.

Ответ: 24 м^3 .

Задача 19. Бригада слесарей может выполнить некоторое задание по обработке деталей на 15ч быстрее, чем бригада учеников. Если бригада учеников отработает 18ч, выполняя это задание, а потом бригада слесарей продолжит выполнение задания в течение 6ч, то и тогда будет выполнено только $3/5$ всего задания. Сколько времени требуется бригаде учеников для самостоятельного выполнения данного задания?

Решение. Пусть V деталей – объем задания, $x \frac{\text{дет}}{\text{час}}$ – производительность бригады слесарей; $y \frac{\text{дет}}{\text{час}}$ – производительность бригады учеников. Тогда $\frac{V}{x}$ ч и $\frac{V}{y}$ ч- время, необходимое бригаде слесарей и бригаде учеников для выполнения всего задания соответственно.

По условию $x > y$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{V}{y} - \frac{V}{x} = 15, \\ 18y + 6x = \frac{3}{5}V; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{V}{y} - \frac{V}{x} = 15, \\ 30 \cdot \frac{y}{V} - 10 \cdot \frac{x}{V} = 1. \end{cases}$$

Пусть $\frac{V}{y} = u$; $\frac{V}{x} = v$, тогда

$$\begin{cases} u - v = 15, \\ 30v + 10u = uv; \end{cases} \quad \begin{cases} v = u - 15, \\ u = 45, \\ u = 10. \end{cases}$$

Согласно условию задачи, получим, что бригаде учеников понадобится для самостоятельного выполнения задания 45 дней.

Ответ: 45 дней.

Задача 20. Бак наполняется двумя кранами А и В. Наполнение бака только через кран А длится на 22 мин. дольше, чем наполнение через кран В. Если же открыть оба крана, то бак наполнится через 1ч. За какое время каждый кран в отдельности может наполнить бак?

Решение: Используем таблицу для составления краткой записи:

	Время (мин)	Работа	Производительность
А	$x + 22$	1	$\frac{1}{x+22}$
В	x	1	$\frac{1}{x}$
А и В	60	1	$\frac{1}{60}$

Составим уравнение: $\frac{1}{x+22} + \frac{1}{x} = \frac{1}{60}$;

$$x^2 + 98x - 1320 = 0; \quad x_1 = 110, \quad x_2 < 0.$$

Чтобы наполнить бак, крану В требуется 110 минут, а крану А $110 + 22 = 132$ минуты.

Ответ: 132мин., 110мин.

Задача 21. Двое рабочих выполнили всю работу за 10 дней, причем последние 2 дня первый из них не работал. За сколько дней первый рабочий выполнил бы всю работу, если известно, что за первые 7 дней они вместе выполнили 80% всей работы?

Ответ: за 14 дней.

В некоторых задачах искомая величина является комбинацией неизвестных, относительно которых удастся составить уравнения, используя условия задачи.

Задача 22. Бассейн был наполнен водой несколькими насосами одинаковой производительности, которые включались в работу один за другим через равные промежутки времени. Первый насос перекачал на V л больше последнего. Если промежутки времени между включениями насосов уменьшить втрое, то время наполнения уменьшится на 10%. Какой объем воды перекачает каждый насос при наполнении бассейна, если одновременно включить все насосы?

Решение: Введем переменные, неявно фигурирующие в условии задачи: n – число насосов, x – производительность, t_1 – время работы одного насоса в первом случае, d – интервал между включениями насосов, t_2 – время работы одного насоса при одновременном включении.

Т.к. времена работы насосов образуют арифметическую прогрессию и последний при этом перекачивает воды на V л меньше первого, то можно составить уравнение:

$$xt_1 - x(t_1 - (n-1)d) = V \quad (*)$$

В первом случае объем перекачанной воды V можно выразить через введенные неизвестные, используя формулу суммы арифметической прогрессии:

$$V = \frac{2xt_1 - x(n-1)d}{2} n.$$

Во втором случае промежутки между включениями сократились в три раза и время наполнения – на 10%, т.е. тот же объем будет равен

$$V = \frac{2x \cdot 0,9t_1 - x(n-1) \cdot \frac{d}{3}}{2} \cdot n$$

Приравнявая эти выражения, получим второе уравнение

$$t_1 x = \frac{10}{3} x(n-1)d \quad (**)$$

Если сразу будут включены все насосы, то к моменту наполнения бассейна каждый из них проработает t_2 времени, а перекачает $x \cdot t_2$ литров. Т.к. насосов n , то вместе они перекачают весь объем, получим:

$$\frac{2xt_1 - x(n-1)d}{2} \cdot n = xt_2 n, \text{ или } xt_2 = \frac{2xt_1 - x(n-1)d}{2} \quad (***)$$

Из уравнения (*) : $x(n-1)d = V_{\text{л}}$, а из (**): $xt_1 = \frac{10}{3} V_{\text{л}}$.

Подставляя эти значения в (***) , получим:

$$xt_2 = \frac{17}{6} V_{\text{л}}.$$

Ответ: $\frac{17}{6} V$ литров.

Задача 23*. Для уборки урожая было выделено несколько одинаковых комбайнов, которые могли бы убрать поле за 24ч, если бы приступили к работе одновременно. Но случилось так, что они приступали к работе один за другим через равные промежутки времени, и затем каждый работал до окончания уборки. За какое время была проведена уборка урожая, если первый комбайн работал в 5 раз дольше, чем последний?

Ответ: за 40ч. Указание: использовать формулу суммы арифметической прогрессии.

Задача 24*. Бассейн заполняется с помощью нескольких насосов одинаковой производительности, которые включались один за другим через равные промежутки времени. Последний насос перекачал $V_{\text{л}}$ воды. Сколько воды перекачал первый насос, если известно, что при уменьшении производительности каждого насоса на 10% (при таких же промежутках между включениями) время наполнения бассейна увеличится на 10%?

Ответ: $\frac{5}{4} V$. Указание: использовать формулу суммы арифметической прогрессии.

Задача 25. Две бригады выполняют определенную работу за 4 дня. Если бы одна из них выполнила бы половину работы, а затем вторая – оставшуюся часть, то вся работа

была бы закончена за 9 дней. За сколько дней каждая из бригад в отдельности смогла бы выполнить всю работу?

Решение: Пусть весь объем работы равен 1. Бригады выполняют работу в отдельности за t_1 и t_2 дней соответственно. Следовательно, бригады имеют производительность

$$\frac{1}{t_1} \text{ и } \frac{1}{t_2} \text{ соответственно. Тогда из условия задачи имеем систему: } \begin{cases} \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = 4, \\ \frac{2}{t_1} + \frac{2}{t_2} = 9; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2} = 4, \\ t_1 + t_2 = 18; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 12, \\ t_2 = 6; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} t_1 = 6, \\ t_2 = 12. \end{cases}$$

Ответ: первая бригада выполнит всю работу за 12дней, вторая – за 6 дней (или наоборот).

Задача 26. Двое рабочих, работая совместно, могут выполнить данную работу за 12 дней. Если первый рабочий сделает половину работы, а затем второй – оставшуюся часть, то вся работа будет выполнена за 25 дней. Сколько дней нужно каждому из рабочих для выполнения работы?

Решение: Примем весь объем работы за 1. Пусть t_1 и t_2 дней необходимо каждому рабочему на выполнение работы.

$\frac{1}{t_1}, \frac{1}{t_2}$ -производительность рабочих. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{1}{12}, \\ \frac{0,5}{t_1} + \frac{0,5}{t_2} = 25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 20, \\ t_2 = 30. \end{cases}$$

Ответ: 20 дней, 30 дней (или наоборот).

Задача 27. Двое рабочих, работая одновременно, выполнили всю работу за 5 дней. Если бы первый работал бы вдвое быстрее, а второй – вдвое медленнее, то работа заняла бы у них 4 дня. За сколько времени выполнил бы всю работу один первый рабочий?

Решение: Примем весь объем работы за 1. t_1 дней, t_2 дней потребуется каждому рабочему соответственно на выполнение всей работы.

$\frac{1}{t_1}, \frac{1}{t_2}$ – производительность рабочих.

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{1}{5}, \\ \frac{2}{t_1} + \frac{1}{2t_2} = \frac{1}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 10, \\ t_2 = 10. \end{cases} \quad \text{Итак, один первый рабочий выполнит всю работу за 10 дней.}$$

Ответ: за 10 дней.

Задача 28. Двое рабочих изготавливали партию одинаковых деталей. Когда первый проработал 2 часа, а второй 5 часов, оказалось, что они выполнили половину работы. После того как они проработали вместе еще 3 часа, им осталось выполнить $\frac{1}{20}$ всей работы. За какое время каждый рабочий выполнит всю работу?

Решение: Примем весь объем работы за 1. x часов, y часов требуется каждому рабочему соответственно на выполнение всей работы.

$\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ - производительность рабочих. Получим:

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = \frac{1}{2}, \\ (\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) \cdot 3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{20}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = \frac{9}{20}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12, \\ y = 15. \end{cases}$$

Первый рабочий выполнит всю работу за 12 ч, второй – за 15 ч.
Ответ: 12 часов и 15 часов.

Задача 29. Две бригады должны были закончить уборку урожая за 12 дней. После 8 дней совместной работы первая получила другое задание, поэтому вторая закончила оставшуюся часть работы за 7 дней. За сколько дней могла бы убрать урожай каждая бригада, работая в отдельности?

Решение: Обозначение смотри выше. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}, \\ (\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) \cdot 8 + \frac{7}{y} = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}, \\ \frac{8}{x} + \frac{15}{y} = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20, \\ y = 25. \end{cases}$$

Ответ: 20 часов; 25 часов.

Задача 30. Для прокладки траншеи выделены два экскаватора разных типов. Время, необходимое первому экскаватору для самостоятельной прокладки траншеи, на 3 часа меньше времени, необходимого второму экскаватору. Сумма этих времен в $4\frac{4}{35}$ раза больше времени, необходимого для прокладки траншеи при их совместной работе. Определить, сколько времени необходимо каждому экскаватору для самостоятельной прокладки траншеи?

Решение: Примем объем работы за 1. t_1 и t_2 часов требуется каждому экскаватору для самостоятельной прокладки траншеи.

По условию задачи $t_2 - t_1 = 3$.

Производительность соответственно равна: $\frac{1}{t_1}$; $\frac{1}{t_2}$;

При совместной работе: $\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2}$.

$\frac{1}{\frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2}}$ - время, необходимое для прокладки траншеи при совместной работе.

По условию задачи: $t_1 + t_2 = 4\frac{4}{35} \cdot \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}$.

Получим:

$$\begin{cases} t_2 - t_1 = 3, \\ t_1 + t_2 = 4\frac{4}{35} \cdot \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 7,5, \\ t_2 = 10,5. \end{cases}$$

Ответ: 7,5 часов и 10,5 часов.