Кухтенко Елена Анатольевна, учитель математики высшей категории МБОУ гимназии № 1 города Армавира Краснодарского края.

ЗАДАЧИ НА ПРОЦЕНТНЫЙ ПРИРОСТ И ВЫЧИСЛЕНИЕ «СЛОЖНЫХ ПРОЦЕНТОВ»

Пусть некоторая переменная величина А, зависящая от времени *t,* в начальный момент $t=0$ имеет значение A_0, а в некоторый момент времени t_1 имеет значение A_1. **Абсолютным приростом** величины А за время t_1 называется разность A_1-A_0, **относительным приростом** величины А за это время t_1- отношение $\frac{A_1-A_0}{A_0}$ и **процентным приростом** величины А за время t_1 – величина $\frac{A_1-A_0}{A_0}\cdot 100\%$.

Обозначим процентный прирост величины А через р%, получаем следующую формулу, связывающую значение A_0, A_1 и процентный прирост р:

$$p\%=\frac{A_1-A_0}{A_0}\cdot 100\% \qquad \textbf{(1)}$$

Запись формулы (1) в виде:

$A_1= A_0(1+\frac{p}{100})= A_0+ A_0\frac{p}{100}$ позволяет по известному значению A_0 и заданному значению р вычислить значение A_1, т.е. значение А в момент времени t_1.

Пусть теперь известно, что и далее при $t > t_1$ величина А имеет процентный прирост р%. Тогда в момент времени $t_2= 2t_1$ значение величины $A_2= A_1(1+\frac{p}{100})= A_0(1+\frac{p}{100})^2$.

В момент времени $t_3=3t_1$ значение величины $A_3=A(t_2)$ есть

$$A_3= A_2(1+\frac{p}{100})= A_0(1+\frac{p}{100})^3.$$

В момент времени $n{\cdot}t_1$:

$$A_n= A_0(1+\frac{p}{100})^n.$$

Если за время t_1 (на «первом этапе») величина А изменилась на $p_1\%$, на «втором этапе» (т.е. за время $t_2 - t_1 = t_1$) – на р %, на «третьем этапе» (т.е. за время $t_3 - t_2 = t_1$) – на p_3% и т.д., то значение величины А в момент времени $t_n= n\cdot t_1$ вычисляется по формуле:

$$A_n= A_0(1+\frac{p_1}{100})(1+\frac{p_2}{100})\ldots(1+\frac{p_n}{100}).$$

Задача 1. Предприятие работало три года. Выработка продукции за второй год работы предприятия возросла на р%, а на следующий год она возросла на 10% больше, чем в предыдущий. Определить, на сколько процентов увеличилась выработка за второй год, если известно, что за два года она увеличилась в общей сложности на 48,59%.

Решение. Обозначим количество продукции, произведенной за первый, второй и третий годы работы предприятия, через A_1, A_2, A_3 соответственно. По условию задачи за второй год % прирост составил р%, а за третий год (р+10)%. По определению % прироста эти условия дают два уравнения:

$\frac{A_2 - A_1}{A_1} \cdot 100\% = p\%$ (1), $\frac{\grave{A}_3 - \grave{A}_2}{\grave{A}_2} \cdot 100\% = (\eth + 10)\%.(2)$ По условию задачи известно, что за два года производство выросло на 48,59% , т.е. в третий год предприятие производило на 48,59% продукции больше, чем в первый год. Это условие можно записать в идее уравнения $\frac{A_3 - A_1}{A_1} \cdot 100\% = 48{,}59\%(3)$.

Уравнения (1), (2), (3) можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} A_2 = A_1(1 + \frac{p}{100}); \\ A_3 = A_2(1 + \frac{p+10}{100}); \\ A_3 = A_1(1 + \frac{48{,}59}{100}). \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на второе, получим

$$A_3 = A_1(1 + \frac{p}{100})(1 + \frac{p+10}{100}).$$

Из полученного уравнения и третьего уравнения системы получим уравнение для отыскания р:

$$(1 + \frac{p}{100})(1 + \frac{p+10}{100}) = 1 + \frac{48{,}59}{100};$$

$p^2 + 210p - 3859 = 0$

$p_1 = 17$; $p_2 = 227$.

По смыслу задачи р = 17.

Ответ: 17%.

Задача 2. Сберкасса начисляет ежемесячно 3% от суммы вклада. Через сколько лет внесенная сумма удвоится?

Ответ: ≈ через 23 года.

Задача 3. Население города ежегодно увеличивается на $\frac{1}{50}$ наличного числа жителей. Через сколько лет население утроится?

Ответ: ≈ через 55 лет.

Задача 4. За килограмм одного продукта и десять килограммов другого заплачено 2 р. Если при сезонном изменении цен первый продукт подорожает на 15%, а второй подешевеет на 25%, то за такое же количество этих продуктов будет заплачено 1 р.82 к. Сколько стоит килограмм каждого продукта?

Ответ: 12 к, 80 к.

Задача 5. В начале года в сберкассу на книжку было внесено 1640 руб., а в конце года было взято обратно 882 р. Еще через год на книжке снова оказалось 882 р. Сколько % начисляет сберкасса в год?

Ответ: 5%.

Задача 6. В букинистическом магазине антикварные собрание сочинений стоимостью 350 р.уценивали дважды на одно и то же число процентов. Найти это число, если известно, что после двойного снижения собрание сочинений стоит 283 руб.50к.

Ответ: 10%.

Задача 7. Два куска латуни имеют массу 120 кг. Первый кусок содержит 20 кг чистой меди, а второй – 16 кг. Сколько процентов меди содержит первый кусок латуни, если второй содержит меди на 15% больше?

Решение. Пусть m_1 и m_2 – массы первого и второго куска латуни соответственно, x – искомый процент меди, тогда (x + 15) – процент содержания чистой меди во втором куске. В принятых обозначениях из условия задачи, получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{m_1 x}{100} = 20 \\ \dfrac{m_2(x+15)}{100} = 16 \\ m_1 + m_2 = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = \dfrac{120}{x} \\ m_2 = \dfrac{1600}{15+x} \\ \dfrac{2000}{x} + \dfrac{1600}{15+x} = 120 \end{cases}$$

$x^2 - 15x - 250 = 0;$

$x_1 = 25, x_2 = -10.$

Первый кусок латуни содержит 25% чистой меди.

Ответ: 25%.

Задача 8. Цена товара была повышена на p%. На сколько процентов надо теперь ее снизить, чтобы получить первоначальную цену товара?

Решение. Пусть x – рублей первоначальная цена товара, тогда цена товара повысилась на $\frac{xp}{100}$ *руб* и стала $x + \frac{xp}{100}$ *руб*. Чтобы получить первоначальную цену товара, необходимо $x + \frac{xp}{100}$ снизить на $\frac{xp}{100}$ *руб*. Найдем, сколько процентов $\frac{xp}{100}$ составляет от $x + \frac{xp}{100}$:

$$\left(\frac{xp}{100} : \left(x + \frac{xp}{100}\right)\right) \cdot 100\% = \left(\frac{xp}{100} \cdot \frac{100}{100x + xp}\right) \cdot 100\% = \frac{p}{100+p} 100\%$$

Ответ: на $\dfrac{100p}{p+100}\%$

Задача 9. Вычислить вес и процентное содержание серебра в сплаве с медью, зная, что сплавив его с 3 кг чистого серебра, получат сплав, содержащий 90% серебра, а сплавив его с 2 кг сплава, содержащего 90% серебра, получат сплав с 84% содержанием серебра.

Решение. Пусть M - общая масса сплава, кг; m-масса серебра в сплаве, кг; x – процентное содержание серебра в сплаве с медью.

X% = $\dfrac{m}{M} \cdot 100\%$.

Найдем, сколько кг чистого серебра содержится в 2 кг сплава содержащего 90% серебра.

$2 \cdot 0{,}9 = 1{,}8$ кг.

В принятых обозначениях из условия задачи получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{(m+3)\cdot 100}{M+3} = 90, \\ \dfrac{m+1{,}8}{M+2}\cdot 100 = 84. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{90(M+3)-300}{100}, \\ m = \dfrac{84(M+2)-180}{100}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M = 3, \\ m = 2{,}4. \end{cases}$$

90M – 30 =84M – 12 ;
M = 3.

Итак, в сплаве содержится 2,4 кг серебра, что составляет $\frac{2{,}4}{3}\cdot 100\% = 80\%$.

Ответ: 2,4 кг; 80%.

Задача 10. Имеются два сплава из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40% олова, а второй – 26% меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30% цинка. Определите, сколько кг олова содержится в получившемся новом сплаве.

Решение. В 150 кг первого сплава содержится 150·0,4 = 60 кг олова; в 250 кг второго сплава содержится 250·0,26=65 кг меди; в 400 кг третьего сплава содержится 400·0,3=120 кг цинка.

30% цинка содержится в первом, втором и третьем сплавах, т.е. 45 кг, 75 кг, 120 кг соответственно. Отсюда, во втором сплаве содержится 250-(75+65)=110 кг олова. Поэтому в третьем сплаве содержится 60+110=170 кг олова.

Ответ: 170 кг.

Задача 11. В двух сплавах медь и цинк относятся по весу как 5:2 и 3:4. Сколько нужно взять кг первого сплава и сколько второго, чтобы после совместной переплавки получить 28 кг нового сплава с равным содержанием меди и цинка?

Решение. Пусть m_1 и m_2 – массы первого и второго сплавов. По условию задачи $m_1 + m_2 = 28$.

В новом сплаве меди $\frac{5}{7}m_1 + \frac{3}{7}m_2$, цинка $\frac{2}{7}m_1 + \frac{4}{7}m_2$. По условию $\frac{5}{7}m_1 + \frac{3}{7}m_2 = \frac{2}{7}m_1 + \frac{4}{7}m_2$. Имеем:

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = 28, \\ \frac{5}{7}m_1 + \frac{3}{7}m_2 = \frac{2}{7}m_1 + \frac{4}{7}m_2; \end{cases} \quad \begin{cases} m_1 + m_2 = 28, \\ 3m_1 = m_2; \end{cases} \quad \begin{cases} m_1 = 7, \\ m_2 = 21. \end{cases}$$

Ответ: первого сплава взять 7 кг., второго – 21 кг.

Задача 12. Два раствора, из которых первый содержит 0,8 кг, а второй 0,6 кг безводной кислоты, соединили вместе и получили 10 кг нового раствора серной кислоты. Найти вес первого растворов в смеси, если известно, что безводной серной кислоты содержится в первом растворе на 10% больше.

Решение. Пусть m_1 и m_2 – массы воды в первом и втором растворах соответственно.

Тогда масса первого раствора m_1+0,8; второго m_2+0,6. По условию задачи (m_1+0,8)+(m_2+0,6)=10 кг – масса нового раствора.

$\frac{0{,}8}{m_1+0{,}8}\cdot 100\%$ - процентное содержание безводной серной кислоты в первом растворе;

$\frac{0{,}6}{m_2+0{,}6}\cdot 100\%$ - процентное содержание безводной серной кислоты во втором растворе.

По условию $\frac{0{,}8}{m_1+0{,}8}\cdot 100\%$ - $\frac{0{,}6}{m_2+0{,}6}\cdot 100\%=10$.

Получим систему:

$$\begin{cases} m_1+m_2+1{,}4=10, \\ \frac{80}{m_1+0{,}8}-\frac{60}{m_2+0{,}6}=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1=8{,}6-m_2, \\ \frac{8}{m_1+0{,}8}-\frac{6}{m_2+0{,}6}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1=3{,}2 \\ m_2=5{,}4. \end{cases}$$

$8(m_2+0{,}6)-6(m_1+0{,}8)=(m_1+0{,}8)(m_2+0{,}6)$

$m_2^2+5{,}2m_2-57{,}24=0$

$D=6{,}76+57{,}24=64$;

$m_2=-\frac{2{,}6\pm 8}{1}$; $\quad m_2=5{,}4;$

$m_2{}' \prec 0$

Итак, первого раствора необходимо взять 3,2+0,8 = 4 кг, второго раствора 5,4+0,6 = 6 кг.

Ответ: 4 кг, 6 кг.

Задача 13. Величины процентного содержания спирта в трех растворах образуют геометрическую прогрессию. Если смешать первый, второй и третий растворы в весовом отношении 2:3:4, то получится раствор, содержащий 32% спирта. Если же смешать их в отношении 3:2:1, то получится раствор, содержащий 22% спирта. Сколько процентов спирта содержит каждый раствор?

Решение. По условию растворы содержат b_1, b_1q, b_1q^2 долей спирта соответственно. В первом случае было взято спирта $2V_1b_1 + 3V_1b_1q + 4V_1b_1q^2$ при общем весе $2V_1+3V_1+4V_1$, что приводит к уравнению $\frac{V_1b_1(2+q\cdot 3+4q^2)}{9V_1}=\frac{32}{100}$.

Во втором случае было взято спирта $3V_2b_1 + 2V_2b_1q + V_2b_1q^2$ при общем весе $3V_2+2V_2+V_2$, т.е. $\frac{V2b_1(3+2q+q^2)}{6V_2}=\frac{22}{100}$.

$$\begin{cases} \frac{b_1(2+3q+4q^2)}{9}=\frac{8}{25} \\ \frac{b_1(3+2q+q^2)}{3}=\frac{11}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=2 \\ b_1=0{,}12. \end{cases}$$

Ответ: 12%, 24%, 48%.

Задача 14. В лаборатории имеется раствор поваренной соли четырех различных концентраций. Если смешать первый, второй и третий растворы в весовом отношении 3:2:1, то получится 15% раствор. Второй, третий и четвертый растворы, взятые в равной пропорции, дают при смешивании 24% раствор и, наконец, раствор, составленный из равных частей первого и третьего растворов, имеют концентрацию 10%. Какова концентрация получится при смешивании второго и четвертого растворов в отношении 2:1?

Ответ: 29%.

Задача 15. В сосуде p кг q%-го раствора кислоты. Из сосуда выливается m кг смеси и доливается m кг воды, после чего раствор перемешивается. Эта процедура повторяется k-раз. Сколько будет кислоты (V_k) и какова будет концентрация кислоты ($C_к$) в растворе после k процедур?

Решение. После первого отлива имеем:

$$V_1 = \frac{pq}{100} - \frac{mq}{100} = \frac{pq}{100}(1 - \frac{m}{p});$$

$$C_1 = \frac{q}{100}(1 - \frac{m}{p}.)$$

После второго отлива:

$$V_2 = \frac{pq}{100}(1 - \frac{m}{p}) - \frac{mq}{100}(1 - \frac{m}{p}) = \frac{pq}{100}(1 - \frac{m}{p})^2;$$

$$C_2 = \frac{q}{100}(1 - \frac{m}{p})^2$$

После k процедур:

$$V_k = \frac{pq}{100}(1 - \frac{m}{p})^k; (1)$$

$$C_k = \frac{q}{100}(1 - \frac{m}{p})k. (2)$$

Эти формулы можно доказать методом математической индукции.

Задача 16. Из сосуда, до краев наполненного чистым глицерином, отлили 2 л глицерина, а к оставшемуся глицерину добавили 2 л воды. После перемешивания снова отлили 2 л смеси и долили 2 л воды. Наконец, опять после перемешивания, отлили 2 л смеси и долили 2 л воды. В результате этих операций объем воды в сосуде стал на 3 л больше объема оставшегося в нем глицерина. Сколько литров глицерина и воды оказалось итого в сосуде?

Решение. (см. задачу 15). Пусть первоначально в сосуде было V л 100%-ного глицерина. После трех переливаний (m = 2, k = 3, V = p, q = 100),получим смесь, объем которой равен Vл, в ней глицерина $\frac{V \cdot 100}{100}(1 - \frac{2}{V})^3$ л, воды $V(1 - \frac{2}{V})^3 + 3$.

Получим уравнение:

$$2V(1 - \frac{2}{V})^3 + 3 = V;$$

$$2V(1 + 3\frac{4}{V^2} - 3\frac{2}{V} - \frac{8}{V^3}) + 3 = V;$$

$$2V - \frac{16}{V^2} - 12 + \frac{24}{V} + 3 = V;$$

$$V^3 - 9V^2 + 24V - 16 = 0;$$

$$(V - 1)(V - 4)^2 = 0;$$

V = 1 - ïðîòèâîðå÷ èò ôèçè÷åñêîì ó ñìûñëó.

V = 4.

Итак, в сосуде оказалось $4(1 - \frac{2}{4})^3 = 0{,}5$ л; воды – 3,5 л.

Ответ: 0,5л, 3,5л.

Задача 17. Из бутылки, наполненной 12%-ным (по массе) раствором соли, отлили 1 л и налили 1 л воды, затем отлили 1 л полученного раствора и снова долили 1л воды. Бутылке оказался 3% (по массе) раствор соли. Какова вместимость бутылки?

Решение. Применим формулу (1) из задачи №15. Пусть $V_л$ – объем бутылки.
q=12, m=1, k=2.

После всех процедур получим смесь, объем которой Vл , в ней соли $\frac{12V}{100}(1-\frac{1}{V})^2$; что составляет 3% от объема. Составим уравнение:

$$\frac{3V}{25}(1-\frac{1}{V})^2 = 0{,}03V;$$

$$3(1-\frac{2}{V}+\frac{1}{V^2}) = 0{,}75V;$$

$$3V^2 = 8V + 4 = 0;$$

$$V_1 = 2;$$

$V_2 = \frac{2}{3}$ - не удовлетворяет физическому смыслу.

Ответ: вместимость бутылки 2 л.

Задача 18. Из сосуда наполненного 96% раствором кислоты, отлили 2,5 л и долили 2,5 л 80% раствора той же кислоты, затем еще раз отлили 2,5 л и снова долили 2,5 л 80% раствора кислоты. После этого в сосуде получился 89%-ный раствор кислоты. Определить вместимость сосуда.

Решение. Пусть вместимость сосуда V л. В смеси находится 0,96 V л кислоты.
1). Первая процедура. Отлили 2,5 л смеси, в ней 2,5·0,96 = 2,4 л кислоты. Добавили 2,5 80%-го раствора кислоты, в ней кислоты 2,5·0,8 = 2 л.

Получили смесь Vл, в ней (0,96V-0,4)л кислоты, что составляет $\frac{0{,}96V-0{,}4}{V}\cdot 100\%$.

2). Вторая процедура. Отлили 2,5 л полученной смеси, в ней $2{,}5\cdot\frac{0{,}96V-0{,}4}{V}$ л кислоты. Добавили 2,5 л 80% - ного раствора кислоты, в нем 2л кислоты.

Получим смесь Vл, в ней $(0{,}96V-0{,}4)-\frac{2{,}5(0{,}96V-0{,}4)}{V}+2$ (л), кислоты что составляет 89% раствор кислоты. Составим уравнение:

$$\frac{(0{,}96V-0{,}4)-\frac{2{,}5(0{,}96V-0{,}4)}{V}+2}{V} = \frac{89}{100}.$$

$(0{,}96V^2-0{,}4V-2{,}4V+1+2V)\cdot 100=89V^2$;
$7V^2-80V+100=0$.
D = 1600-700 = 900

$$V = \frac{40\pm 30}{7};$$

$$V_1 = 10;$$

$V_2 = \frac{10}{7}$ – не удовлетворяет физическому смыслу задачи.

Ответ: 10 л.

Задачи 19. Из полного бака, содержащего 729 л кислоты, отлили V л раствора и снова долили бак водой. После тщательного перемешивания отлили V л раствора и снова долили бак водой. После повторения такой процедуры 6 раз, раствор в баке содержал 64 л кислоты. Найти величину V.

Решение. (см. формулы зад.№15).

Положив q= $\frac{729-V}{729}\cdot 100$; p=729, m=V, k=6; получим

$64=(729-V)(1-\frac{V}{729})^5$;

$V=243$.

Ответ: 243 л.

Задача 20. Сберкасса начисляет ежемесячно p% от суммы вклада Q. Какова будет сумма вклада Q_k через k месяцев?

Решение. Через месяц вклад равен $Q_1=Q+Q\frac{p}{100}=Q(1+\frac{p}{100})$

Через два месяца, получим $Q_2=Q_1+Q_1\frac{p}{100}=Q_1(1+\frac{p}{100})=Q(1+\frac{p}{100})^2$

Аналогично, $Q_k=Q(1+\frac{p}{100})^k$ Доказывается методом математической индукции.

Задача 21. При двух последовательных одинаковых процентных повышениях зарплата суммой в 1000 рублей обратилась в 1254,4 рубля. Определить, на сколько процентов каждый раз повышалась зарплата.

Решение. Согласно формуле задачи 20, имеем

Q_k=1254,4 Q=1000, k=2.

Получим: $1254{,}4=1000(1+\frac{p}{100})^2$

1254,4=1000+ 20p + $\frac{p^2}{10}$;

P^2+200p-2544=0.

D=10000+2544=12544=112^2

p=-100±112

$p_1<0$; $p_2=12$.

Ответ: на 12%.

ЗАДАЧИ С ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Целочисленность искомого неизвестного обычно является дополнительным условием, позволяющим выбрать его однозначно из некоторого множества значений, удовлетворяющих остальным условиям задачи.

Задача 1. Группа студентов, состоящая из 30 человек, получила на экзамене оценки 2,3,4,5. Сумма полученных оценок равна 93, причем «троек» было больше, чем «пятерок», и меньше, чем «четверок». Кроме того, число «четверок» делилось на 10, а число «пятерок» было четным. Определить, сколько каких оценок получила группа.

Решение. Пусть число «2» - x, «3» - y, «4» - z, «5» - u.
Тогда условия задачи можно записать в виде системы уравнений и неравенств:

$$\begin{cases} x+y+z+u=30, \\ 2x+3y+4z+5u=93, \\ y>u, \\ y<z, \\ z=10k, \\ u=2l; l,k \text{ - целые числа} \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим $x + 2y + 3z + 4u=63(*)$.
Т.к. z кратно 10, то единственное возможное значение для k – это k=1 (т.к. приk>1 уравнение (*) не имеет решения в целых положительных числах). Итак, z = 10, тогда (*) имеет вид: $x + 2y + 4u=33(**)$.
Возможные значения для u (оно должно быть положительным, четным и меньшим y<10, $u<y<10$, $u<10$) u = 2, 4, 6, 8. Однако при u = 6 и u = 8 получаем, что уравнение (**) в целых числах не имеет решений.
Действительно, если u = 6, то 6 < y < 10. Уже при y = 7 получим x < 0,что не удовлетворяет условию задачи.
Следовательно, проверке подлежат лишь значения 2 и 4. При u=4 получим систему уравнений (1 и 2 из системы)

$$\begin{cases} x+2y=17, \\ 2x+3y=33; \end{cases} \begin{cases} y=1, \\ x=15. \end{cases}$$ Значения y = 1 не удовлетворяет условию $y > u$.

При $u=2$, получим:

$$\begin{cases} x+2y=25, \\ 2x+3y=43; \end{cases} \begin{cases} y=11, \\ x=7. \end{cases}$$

Ответ: «5» - 2; «4» - 10; «3» - 7; «2» - 11.

Задача 2. Школьник переклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 20 марок на один лист, то ему не хватит альбома, а если по 23 марки на лист, то по крайне мере один лист окажется пустым. Если школьнику подарить такой же альбом, на каждом листке которого наклеено по 21 марке, то всего у него станет 500 марок. Сколько листов в альбоме?
Ответ: 12 листов.

Задача 3. В классе писали контрольную работу. Среди выставленных за нее оценок встречаются только оценки 2, 3, 4, 5. Оценок 2, 3, 5 получило одинаковое число учеников, а оценок 4 поставлено больше, чем всех остальных вместе взятых. Оценки выше 3 получили менее 10 учеников. Сколько «3» и сколько «4» было поставлено, если писали контрольную работу не менее 12 учеников?

Решение. Пусть число «2», «3», «5» равно x, число «4» равно y. По условию задачи должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} y>3x, \\ y+x<10, \\ 3x+y\geq 12. \end{cases}$$

Рассмотрим первое и второе неравенства: $y > 3x$; $y+x > 4x$, тогда $4x < y+x < 10$, значит $4x < 10$. Отсюда $x < 2,5$. Т.к. x - целое положительное число, то x может быть равным либо 1, либо 2.

Пусть $x = 1$, тогда $\begin{cases} y > 6, \\ y < 9. \end{cases}$ $6 < y < 8$, $y=7$.

Ответ: «3» - 2; «4» - 7.

Еще одним типом задач на составление уравнений с целочисленными неизвестными являются задачи на запись чисел в десятичной позиционной системе счисления.

Задача 4. Искомое трехзначное число оканчивается цифрой 1. Если эту цифру перенести с последнего места на первое, сохранив порядок остальных двух цифр, то вновь полученное число будет меньше искомого на 90. Найти это число.

Решение. Пусть число имеет вид $\overline{mn1} = m\cdot 10^2 + n\cdot 10 + 1$. Трехзначное число, образованное в результате переноса 1 с последнего места на первое, будет
$1\cdot 10^2 + m\cdot 10 + n + 90$. (1)
Число единиц в числе, стоящих слева, должно совпадать с числом единиц в числе, стоящем справа, и поэтому n=1. Тогда уравнение (1) имеет вид:
$m\cdot 10^2+10=1\cdot 10^2+m\cdot 10+90$,
m=2.
Ответ: 211.

Задача 5. Если двузначное число разделить на сумму его, то получится в частном 4, а в остатке 3. Если же это число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 3, а в остатке 5. Найти это число.

Решение. Если число N делится на число p и в частном получается число k, то в остатке число r (r < p),то число N = kp+r .
Пусть двузначное число имеет вид $\overline{mn} = 10m + n$. По условию задачи:

$$\begin{cases} 10m + n = 4(m+n) + 3, \\ 10m + n = 3mn + 5; \end{cases} \quad \begin{cases} n = 2m - 1, \\ 2m^2 - 5m + 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} n = 10m + n, \\ \left[\begin{array}{l} m = 2, \\ m = \dfrac{1}{2}. \end{array} \right. \end{cases}$$

По условию задачи m – целое, поэтому m = 2; n = 3.
Ответ: 23.

Задача 6. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если к искомому числу прибавить 36, то получим число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти это число.
Ответ: 48.